

Esercizio n.10

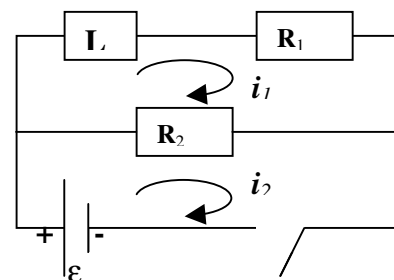
Nella figura a fianco è rappresentato un circuito contenente due resistenze, R_1 ed R_2 , ed un' induttanza L .

L' interruttore viene chiuso al tempo $t = 0$.

Dopo quanto tempo la corrente attraverso R_1 è uguale alla corrente attraverso R_2 ?

Valori numerici:

$$\varepsilon = 30 \text{ V}, L = 5 \text{ H}, R_1 = 10 \Omega, R_2 = 20 \Omega$$



Soluzione

Usiamo il metodo delle correnti circolanti come mostrato in figura.

La prima legge di Kirchhoff applicata alle due maglie del circuito dà

$$\begin{cases} \varepsilon - R_2 i_2 + R_2 i_1 = 0 \\ -L \frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_2 i_1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, si ottiene un' equazione differenziale per i_1

$$L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = \varepsilon$$

che può essere risolta per separazione delle variabili

$$\frac{di_1}{\varepsilon - R_1 i_1} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \int \frac{di_1}{\varepsilon - R_1 i_1} = \int \frac{dt}{L} \Rightarrow \ln(\varepsilon - R_1 i_1) = -\frac{t}{L} + C \Rightarrow \varepsilon - R_1 i_1 = K e^{-\frac{R_1}{L} t}$$

dove la costante $K = e^C$ si ricava imponendo la condizione iniziale $i_1 = 0$ a $t = 0$ e risulta $K = \varepsilon$.

In definitiva

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right)$$

i_2 invece è data da

$$i_2 = \frac{\varepsilon + R_2 i_1}{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_2} + i_1 = \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right)$$

La corrente in R_2 è $i_2 - i_1 = \frac{\varepsilon}{R_2}$ (risultato prevedibile perché quando si chiude l' interruttore la

tensione ai capi di R_2 è ε), la corrente in R_1 è i_1 ; la condizione di uguaglianza di queste due correnti permette di ottenere il tempo richiesto dal problema:

$$i_1 = i_2 - i_1 \Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right) \Rightarrow t = -\frac{L}{R_1} \ln \frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $t = 0.35 \text{ s}$.